INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt:	MO-ME-N-T MOderní MEtody s Novými Technologiemi
Reg.č.:	CZ.1.07/1.5.00/34.0903
Operační program:	Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Škola:	Hotelová škola, Vyšší odborná škola hotelnictví a turismu a Jazyková škola s právem státní jazykové zkoušky Poděbrady
Tematický okruh:	Logaritmické rovnice
Jméno autora:	Mgr. Karel Lhotský
Datum:	30. listopadu 2013
Ročník:	2. ročník HŠ
Anotace:	Učební materiál určený nejen k výkladu v hodinách matematiky, ale především k samostudiu, popřípadě k samostatnému opakování a procvičování učiva

Logaritmické rovnice

Logaritmická rovnice je rovnice, která obsahuje neznámou v logaritmovaném čísle.

Připomeňme si definici logaritmu:
Pro všechna čísla $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $y \in R$ platí
$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.

Logaritmované číslo musí být kladné.

Proto je potřeba vždy stanovit podmínky na všechna logaritmovaná čísla, jež se v rovnici vyskytují, a vyloučit kořeny, které těmto podmínkám nevyhovují.

Metody řešení si ukážeme na konkrétních příkladech.

Příklad 1: $\log_6(x^2 - 1) = \log_6(x+1)$

Nejprve stanovíme podmínky pro logaritmovaná čísla:

$x^2 - 1 > 0,\ x + 1 > 0$

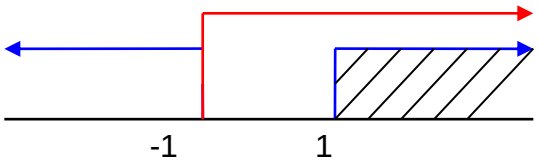
$x^2 - 1 > 0$

$(x + 1)(x - 1) > 0$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$x + 1 > 0$

$x > -1$



Výsledná podmínka:

$x \in (1; \infty)$

Pokud budou podmínky příliš složité, stačí ověřit jejich platnost pro kořeny rovnice po jejich nalezení.

Příklad 1: $\log_6 (x^2 - 1) = \log_6 (x+1)$

$x^2 - 1 = x+1$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x_1 = 2$ … vyhovuje

$x_2 = -1$ … nevyhovuje

$K = \{2\}$

Porovnáváme dva logaritmy o stejných základech.

Pro přípustné hodnoty x, a platí: $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$, neboť funkce $y = \log_a x$ je rostoucí (pro $a > 0$) nebo klesající (pro $a < 0$).

Porovnáme logaritmovaná čísla.

Vyřešíme kvadratickou rovnici (rozkladem nebo pomocí diskriminantu).

Příklad 2: $\log_3(x - 2) = 4$

$x - 2 = 3^4$

$x = 81 + 2$

$x = 83$

$K = \{83\}$

Rovnici řešíme pro $x > 2$.

Rovnici můžeme převést na ekvivalentní tvar podle definice logaritmu.

($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$)

Jednoduchou lineární rovnici snadno vyřešíme.

$83 > 2$

Příklad 2 - jiný způsob řešení

$\log_3(x - 2) = 4$

$\log_3(x - 2) = \log_3 3^4$

V řešení příkladu 2 můžeme využít stejný postup jako u příkladu 1.

Platí: $y = \log_a a^y$.

Tedy: $4 = \log_3 3^4$.

Porovnáme logaritmovaná číla a dále je řešení stejné.

Příklad 3: $2 \cdot \log x = \log(x + 6) + \log 3$

$$\log x^2 = \log(x + 6) \cdot 3$$

$$x^2 = (x + 6) \cdot 3$$

$$x^2 = 3x + 18$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x - 6)(x + 3) = 0$$

$$x - 6 = 0 \ldots x_1 = 6$$

$$x + 3 = 0 \ldots x_2 = -3$$

$$K = \{6\}$$

Neznámá x musí splňovat podmínky: $x > 0$, $x + 6 > 0$.

Rovnici řešíme pro kladná x.

Obě strany rovnice vyjádříme jako logaritmus (dekadický).

Porovnáme logaritmovaná čísla.

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

Vyloučíme nevyhovujícím kořen.

Příklad 4: $\log^2 x - \log x^2 - 8 = 0$

$\log^2 x - 2\cdot\log x - 8 = 0$

$y^2 - 2y - 8 = 0$

$(y - 4)(y + 2) = 0$

$y_1 = 4 = \log x \ldots x_1 = 10^4$

$y_2 = -2 = \log x \ldots x_2 = 10^{-2}$

$K = \{10000; 0{,}01\}$

Rovnici řešíme pro kladná x.

Pozor: $\log^2 x = (\log x)^2$, ale $\log x^2 = 2\cdot\log x$.

Provedeme substituci: $y = \log x$.

Řešíme rovnici pro y, libovolné reálné a určíme x.

Oba kořeny x_1, x_2 jsou kladná čísla. Vyhovují původní rovnici.

Jak na logaritmické rovnice?

Dobře si znovu promyslete všechny čtyři příklady, které jsme dosud vyřešili.

K řešení logaritmických rovnic můžeme využít dvě metody:

a) Vypočítáme logaritmus a pak použijeme k nalezení logaritmovaného čísla definici logaritmu.

b) Vyjádříme obě strany rovnice jako logaritmy o stejném základu a z rovnosti logaritmů plyne rovnost logaritmovaných čísel.

Metodou a) nebylo možné řešit př. 1, 3, neboť se v těchto rovnicích vyskytovala různá logaritmovaná čísla.

Metoda b) nebyla vhodná pro př. 4, protože nemáme vzorec pro mocninu logaritmu.

Př. 2 bylo možné řešit oběma způsoby.

Příklad 5: $\log_7(x+6) = \log_7\sqrt{10x+36}$

$$\log_7(x+6) = \log_7(10x+36)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_7(x+6) = \frac{1}{2}\cdot\log_7(10x+36)$$

$$2\cdot\log_7(x+6) = \log_7(10x+36)$$

$$\log_7(x+6)^2 = \log_7(10x+36)$$

$$(x+6)^2 = 10x+36$$

$$x^2+12x+36 = 10x+36$$

$$x^2+2x = 0$$

$$x\cdot(x+2) = 0$$

Podmínky na neznámou x:

$x + 6 > 0$, $10x + 36 > 0$

Obě jsou splněny pro $x > -3{,}6$.

Logaritmovaná čísla neporovnáme hned, abychom se vyhnuli iracionální rovnici.

Odmocninu zapíšeme jako mocninu s racionálním mocnitelem.

Dále řešíme obvyklým způsobem.

Příklad 5 (dokončení)

$x_1 = 0$

$x + 2 = 0 \ldots x_2 = -2$

$K = \{0; -2\}$

Oba kořeny rovnice vyhovují podmínkám na logaritmovaná čísla.

Příklad 6: $\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0$

$\log_4(\log_3(\log_2 x)) = \log_4 1$

$\log_3(\log_2 x) = 1$

$\log_3(\log_2 x) = \log_3 3$

$\log_2 x = 3$

$x = 2^3 = 8$

Zkouška:

$L = \log_4(\log_3(\log_2 8)) =$
$\log_4(\log_3 3) = \log_4 1 = 0 = P$

$K = \{8\}$

Určení podmínek na x je stejně složité jako řešení celé rovnice.

Proto je teď stanovovat nebudeme, ale provedeme až zkoušku pro výsledný kořen.

Rovnici řešíme postupným porovnáváním logaritmovaných čísel.

Příklad 7: $x^{\log x} = 1000x^2$

$\log(x^{\log x}) = \log(1000x^2)$

$\log x \cdot \log x = \log 1000 + \log x^2$

$\log^2 x = \log 10^3 + 2\log x$

$\log^2 x - 2\log x - 3 = 0$

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y - 3)(y + 1) = 0$

$y_1 = 3 = \log x \ldots x_1 = 10^3$

$y_2 = -1 = \log x \ldots x_2 = 10^{-1}$

$K = \{1000; 0{,}1\}$

Obor řešitelnosti rovnice je zřejmě množina R^+.

Celou rovnici zlogaritmujeme o základu 10.

Používáme stejný základ, jako má logaritmus v exponentu na levé straně rovnice.

Po úpravě dostáváme rovnici, kterou můžeme řešit metodou a).

Oba kořeny jsou kladné.

Příklady k procvičení (1):

1.	$\log_2(x + 7) = 6$	$K = \{57\}$
2.	$\log_4(2x - 1) = 3$	$K = \{32{,}5\}$
3.	$\log(3x - 2) = 2$	$K = \{34\}$
4.	$\log_3(2x - 3) = 4$	$K = \{42\}$
5.	$\log_5(x^2 - 2x + 1) = 2$	$K = \{6; -4\}$
6.	$\log_2(x^2 + 7x - 14) = 4$	$K = \{3; -10\}$
7.	$\log_3(x^2 - x - 3) = 3$	$K = \{6; -5\}$
8.	$\log_4(x^2 + 9x + 24) = 1$	$K = \{-5 ; -4\}$

Příklady k procvičení (2):

9. $\log x^2 + \log x = 12$ $\qquad K = \{10000\}$

10. $\log x^3 - \log x = 4$ $\qquad K = \{100\}$

11. $\log_3 x^3 + 2\cdot\log_3 x = 15$ $\qquad K = \{27\}$

12. $4\cdot\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 60$ $\qquad K = \{64\}$

13. $\log x^6 - \log x^{-2} = 8$ $\qquad K = \{10\}$

14. $\log x^4 + \log \frac{1}{x} = 2$ $\qquad K = \left\{\sqrt[3]{100}\right\}$

15. $\log \sqrt[3]{x^2} + \log x = 1$ $\qquad K = \left\{\sqrt[5]{1000}\right\}$

Příklady k procvičení (3):

16. $2 \cdot \log x = \log (x + 6)$ $\quad K = \{3\}$

17. $2 \cdot \log x = \log (x + 4) + \log 2$ $\quad K = \{4\}$

18. $\log (x - 2) + \log 9 = 2 \cdot \log x$ $\quad K = \{3; 6\}$

19. $\log_2 (x + 7) = 2 + \log_2 (x + 1)$ $\quad K = \{1\}$

20. $\log_3 x - \log_3 (x + 8) = 2$ $\quad K = \emptyset$

21. $\log_4 (2x - 7) - \log_4 (x + 3) = 1$ $\quad K = \emptyset$

22. $\log_3 (x + 24) - \log_3 x = 2$ $\quad K = \{3\}$

23. $\log_6 (x - 2) + \log_6 (x + 3) = 2$ $\quad K = \{6\}$

24. $\log (x + 2) + \log (x + 5) = 2 \cdot \log x$ $\quad K = \emptyset$

25. $\dfrac{\log\left(x^2 + 15)\right)}{\log\left(x + 3\right)} = 2$ $\quad K = \{1\}$

Příklady k procvičení (4):

26. $\log_7^2 x - \log_7 x = 0$ $\qquad K = \{1; 7\}$

27. $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$ $\qquad K = \{16; 0{,}25\}$

28. $\log_3 x + \dfrac{2}{\log_3 x} = -3$ $\qquad K = \left\{\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{3}\right\}$

29. $\log x + \dfrac{16}{\log x} = 8$ $\qquad K = \{10000\}$

30. $\log x^3 = \dfrac{27}{\log x}$ $\qquad K = \{1000; 0{,}001\}$

Příklady k procvičení (5):

31. $\log^2 x + \log x^2 - 8 = 0$ $\quad K = \{100; 0{,}0001\}$

32. $\log^2 x + \log x^6 + 9 = 0$ $\quad K = \{0{,}001\}$

33. $\log(\log_5(\log_3 x)) = 0$ $\quad K = \{243\}$

34. $\log_7(\log_2(\log_5(3x+2))) = 0$ $\quad K = \{9\}$

35. $\ln(\log_2(\log_3(5x-1))) = 0$ $\quad K = \{2\}$

36. $\log(\log_3(\log_2(4x+7))) = 0$ $\quad K = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

Příklady k procvičení (6):

37. $x^{\log x} = 10000$ $\qquad K = \{100; 0{,}01\}$

38. $x^{\log_2 x} = 512$ $\qquad K = \left\{8; \frac{1}{8}\right\}$

39. $x^{\log x} = 0{,}3$ $\qquad K = \emptyset$

40. $x^{\log_3 x} = 81$ $\qquad K = \left\{9; \frac{1}{9}\right\}$

41. $x^{\log x^2} = \sqrt{10}$ $\qquad K = \left\{\sqrt{10}; \frac{\sqrt{10}}{10}\right\}$

42. $x^{2+\log x} = 1000$ $\qquad K = \{10; 0{,}001\}$